黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

高木貞治『解析概論』p.113では

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$$

の計算結果について、Euler(オイラー)の名を引用して説明している。オイラー全集のどこに書いてあるかを教えてもらった。
twitter.com/i/moments/84509094…

実は対応する不定積分は二重対数函数を用いて書ける！

問題：$\log(\sin x)$ の原始函数求めよ。原始函数を表すために、初等函数以外に二重対数函数使ってもよい。

二重対数函数 $\mathrm{Li}_2(x)$ の定義は

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(x) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2} \\ &= \int_0^x \frac{-\log(1-t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

問題の答えは上の方のリンク先にある。正確な結果は複雑なので二重対数函数で書けることを説明するだけでもよい。実は結構簡単。

2017年05月02日 19:17 · Web · 0 · 1 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2
$\log(\sin x)$ の原始函数を求め、その 0 から $\pi/2$ までの積分が実数になること(その虚部が 0 になること)を使うと、$\zeta(2)$ の値も求まります。

オイラーさんは、似たような計算で $\zeta(3)$ が出て来る定積分も扱っています。その場合は三重対数函数が原始函数に出て来ることをWolframAlphaさんに教えてもらいました。

twitter.com/i/moments/84509094…

特に twitter.com/genkuroki/status/8…

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3

$$\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}$$

の原始函数もdilog

$$\mathrm{Li}_w(x) = \int_0^x \frac{-\log(1-t)}{t}\,dt$$

で書けるみたい。

wolframalpha.com/input/?i=%5Ci...

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3

絶対値とつけた

$$(1/x)\log|(1+x)/(1-x)|$$

の原始函数もdilogで書けるようだ。

wolframalpha.com/input/?i=%5Ci...

定積分が求まる場合の中に多重対数函数を使えば原始函数が求まる場合がかなりたくさん入っているように思える。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}\,dx \\
&= \int \frac{-\log(1-x)}{x}\,dx \\
&+ \int \frac{\log(1-(-x))}{-x}\,d(-x) \\
&= \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(-x).
\end{aligned}$$

wolframalpha.com/input/?i=%5Ci...